Clase 3: Estadistica y Probabilidad

Introducción a la Econometría

Jose Ignacio Hernandez

Abril 2020

Algunas definiciones generales

- **Espacio Muestral o Universo:** Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.
- **Puntos Muestrales:** Elementos del espacio muestral.
- **Evento:** Subconjunto del espacio muestral.
- **Muestra:** Conjunto de eventos seleccionados de un espacio muestral.

Ejemplo: Lanzar una moneda

- **Espacio Muestral:** $\{C, S\}$.
- **Puntos Muestrales:** $\{C\}, \{S\}$.
- **Evento:** $\{C\}$.

Ejemplo: Lanzar dos monedas

- **Espacio Muestral:** $\{CC, CS, SC, SS\}$.
- **Puntos Muestrales:** $\{CC\}, \{CS\}, \{SC\}, \{SS\}$.
- **Evento:** $\{CS\}$.

Pregunta:

Ejemplo: Usted posee un dado, lo tira 1 vez y le sale un 3.

- **Espacio Muestral:**
- **Puntos Muestrales:**
- **Evento:**

Probabilidad

Definicion:

Es la proporción de veces que un evento A ocurra en ensayos repetidos.

Notacion:

$P(A)$: Probabilidad de que ocurra el evento A.

Propiedades:

1. Una probabilidad está definida en el intervalo $0 \leq P(A) \leq 1$
2. La suma de las probabilidades de todos los eventos es igual a 1.

Variable

Definicion

Una variable es una magnitud que puede adoptar distintos valores entre distintas observaciones

Ejemplos en economia

- PIB, PIB per capita, crecimiento del PIB
- Exportaciones, importaciones, exportaciones netas
- Precios, IPC, inflacion, consumo

Variable aleatoria

Definicion

Variable cuyo valor está determinado por el resultado de un experimento aleatorio. **experimento aleatorio** (asume un valor con alguna probabilidad asociada)

Las variables aleatorias (v.a.) pueden ser **discretas** o **continuas**:

- **Discreta:** Conjunto finito de valores. Ejemplo: 1, 3, 4, 10.
- **Continua:** Intervalo en los numeros reales. Ejemplo: (0,1).

Variable aleatoria

- Una v.a. puede ser representada formalmente a través de una **distribución de probabilidad**.
- Una distribución de probabilidad es una representación matemática de una determinada variable aleatoria.

Función de densidad de probabilidad (FDP)

- **FDP Discreta:** Es la probabilidad de que la v.a. discreta X tome el valor de x_i.

$$f(x) = P(X = x_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

- **FDP Continua:** Es la función $f(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx &= 1, \text{ donde } f(x) \geq 0. \\ \int_{a}^{b} f(x)\, dx &= P(a \leq x \leq b) \end{aligned}$$

- **FDP Acumulada:** Es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a x_i.

$$F(x) = P(X \leq x_i)$$

Función de densidad de probabilidad (FDP)

La FDP debe cumplir con algunas condiciones para que sea una distribución de probabilidad:

- No puede adoptar números negativos.
- Debe tomar un valor entre cero y uno.
- La suma de todos los sucesos posibles, mutuamente excluyentes, es igual a uno.

Otras funciones de probabilidad relevantes:

- Funcion de probabilidad conjunta
- Funcion de probabilidad marginal
- Funcion de probabilidad condicional

Momentos de una distribución: Esperanza

Definicion

Es el valor promedio de un experimento aleatorio cuando este se repite un elevado número de veces.

Formalizacion

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i), \quad \text{si } X \text{ es discreta,} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{si } X \text{ es continua.}
\end{aligned}
$$

Momentos de una distribución: Varianza

Definicion

Es la dispersión promedio de los valores de una v.a. **con respecto a su Esperanza**

Formalizacion

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 f(x_i) = E(X - \mu)^2$$

Propiedades

Esperanza:

1. $E(b) = b$, donde b es constante.
2. $E(aX + b) = aE(X) + b$, con a, b constantes.
3. $E(XY) = E(X)E(Y)$, si X y Y son independientes.

Varianza:

1. $Var(b) = 0$.
2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$.
3. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$, si X y Y son independientes.

Otros momentos de una distribución.

- Covarianza (producto de los primeros momentos respecto de la media de cada variable aleatoria):

$$Cov\,(X,Y) = E\left\{(X-\mu_x)\,(Y-\mu_y)\right\} = E\,(XY) - \mu_x\mu_y$$

- Esperanza condicional:

$$\begin{aligned} E\,(X|Y=y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i|Y=y), \quad \text{si } X \text{ es discreta,} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|Y=y)dx \quad \text{si } X \text{ es continua.} \end{aligned}$$

- Coeficiente de asimetría (*Skewness*)
- Curtosis (*Kurtosis*)
- Coeficiente de correlación:

$$\rho = \frac{Cov\,(X, Y)}{\sqrt{Var\,(X)\,Var\,(Y)}}, \text{ donde } -1 \leq \rho \leq 1.$$

Distribuciones de Probabilidad Relevantes

Distribucion Normal

Es una de las distribuciones más utilizadas en estadística y en la modelación de fenómenos económicos.

Propiedades relevantes

- **Teorema del límite central**: Cuando el tamaño de la muestra crece, la distribución de cualquier v.a. tiende a una Dist. normal.
- Presente en varios fenomenos naturales

Formalizacion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{(x_i - \mu)^2}{-2\sigma^2}\right]$$

Distribuciones de Probabilidad Relevantes

Distribución Normal Estándar

Es un caso particular de la distribucion normal, con media igual a cero y varianza igual a uno.

Propiedades relevantes

- **Estandarizacion**: Es posible convertir cualquier distribucion normal en una normal estandar a traves de:

$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Formalizacion

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$$

Distribución Chi-Cuadrado

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_k$ variables normales estándar entonces Y sigue una distribución χ^2 si se cumple

$$Y = \sum_{i=1}^{k} z_i^2$$

Distribución t-Student:

Es la división entre una variable normal estándar (z_1) y la raíz de una variable chi-cuadrado (z_2)

$$t = \frac{z_1}{\sqrt{(z_2/k)}},$$ donde k son los grados de libertad.

Distribucion F de Fisher

Es la división entre dos variables chi-cuadrado independientes.

$$F = \frac{z_1/k_1}{z_2/k_2}$$